Παρουσίαση για χρήση με το σύγγραμμα, Αλγόριθμοι Σχεδίαση και Εφαρμογές, των M. T. Goodrich and R. Tamassia, Wiley, 2015 (στα ελληνικά από εκδόσεις Μ. Γκιούρδας)

Δομές Ένωσης-Εύρεσης

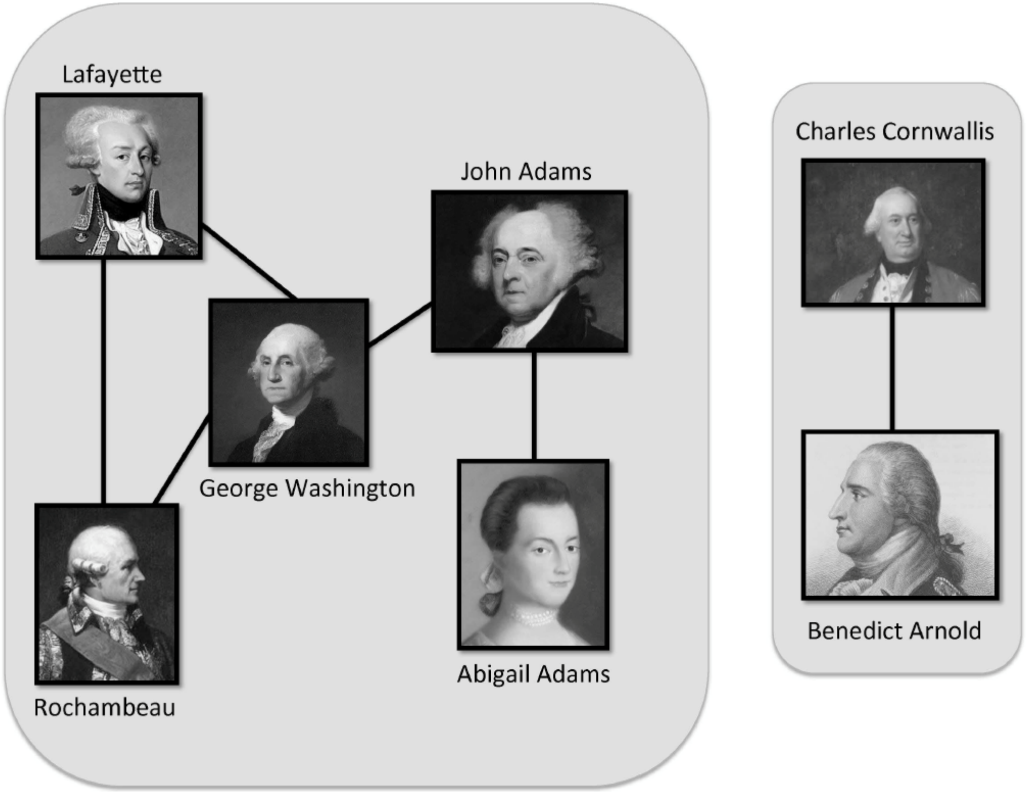
Merging galaxies, NGC 2207 and IC 2163. Combined image from NASA's Spitzer Space Telescope and Hubble Space Telescope. 2006. U.S. government image. NASA/JPL-Caltech/STSci/Vassar.

Εφαρμογή: Συνδεδεμένες συνιστώσες σε κοινωνικό δίκτυο

- Η έρευνα της κοινωνικής δικτύωσης μελετά τον τρόπο που οι σχέσεις μεταξύ διαφόρων ανθρώπων μπορούν να επηρεάσουν τη συμπεριφορά.
- Δεδομένου ενός συνόλου, S, n ανθρώπων, μπορούμε να ορίσουμε ένα κοινωνικό δίκτυο για το S δημιουργώντας ένα σύνολο, E, ακμών ή δεσμών μεταξύ ζευγών ανθρώπων που έχουν συγκεκριμένο είδος σχέσης. Για παράδειγμα, σε ένα δίκτυο φίλων όπως το Facebook, οι δεσμοί θα ορίζονταν από ζεύγη φίλων.
- Μία **συνδεδεμένη συνιστώσα (connected component)** σε ένα δίκτυο φιλίας είναι ένα υποσύνολο, T, ανθρώπων από το S που έχει τις παρακάτω ιδιότητες:
  - Κάθε άτομο στο T σχετίζεται μέσω φιλίας, δηλαδή για οποιαδήποτε άτομα x και y στο T, είτε το άτομο x και το άτομο y είναι φίλοι είτε υπάρχει μια αλυσίδα φιλίας, δηλαδή μέσω ενός φίλου ενός φίλου (για όσες φορές χρειαστεί) που συνδέει τα άτομα x και y.
  - Δεν υπάρχει κανένας στο T που να είναι φίλος με οποιονδήποτε εκτός του T.

Example

- 2 συνδεδεμένες συνιστώσες σε ένα δίκτυο φίλων σημαντικών μορφών της Αμερικάνικης Επανάστασης.



Όλες οι εικόνες είναι δημοσίας χρήσης.

Ένωση-Εύρεση Λειτουργίες

- Μία **δομή ένωσης-εύρεσης (union-find)** είναι μία δομή δεδομένων που υποστηρίζει μια συλλογή ξένων συνόλων (disjoint sets) που διαθέτει τις ακόλουθες λειτουργίες:
- makeSet(e): Δημιουργία συνόλου ενός στοιχείου (singleton set) που περιέχει το στοιχείο e
- union(A,B): Επιστρέφει το A U B (A ένωση B), ονομάζοντας το αποτέλεσμα είτε "A" είτε "B"
- find(e): Επιστρέφει το σύνολο που περιέχει το στοιχείο e

Αλγόριθμος συνδεδεμένων συνιστωσών

- Η έξοδος του αλγορίθμου είναι ένα αναγνωριστικό, για κάθε στοιχείο x του S, της συνδεδεμένης συνιστώσας στην οποία ανήκει το x.

Algorithm UFConnectedComponents(S, E):

Input: A set, S, of n people and a set, E, of m pairs of people from S defining pairwise relationships

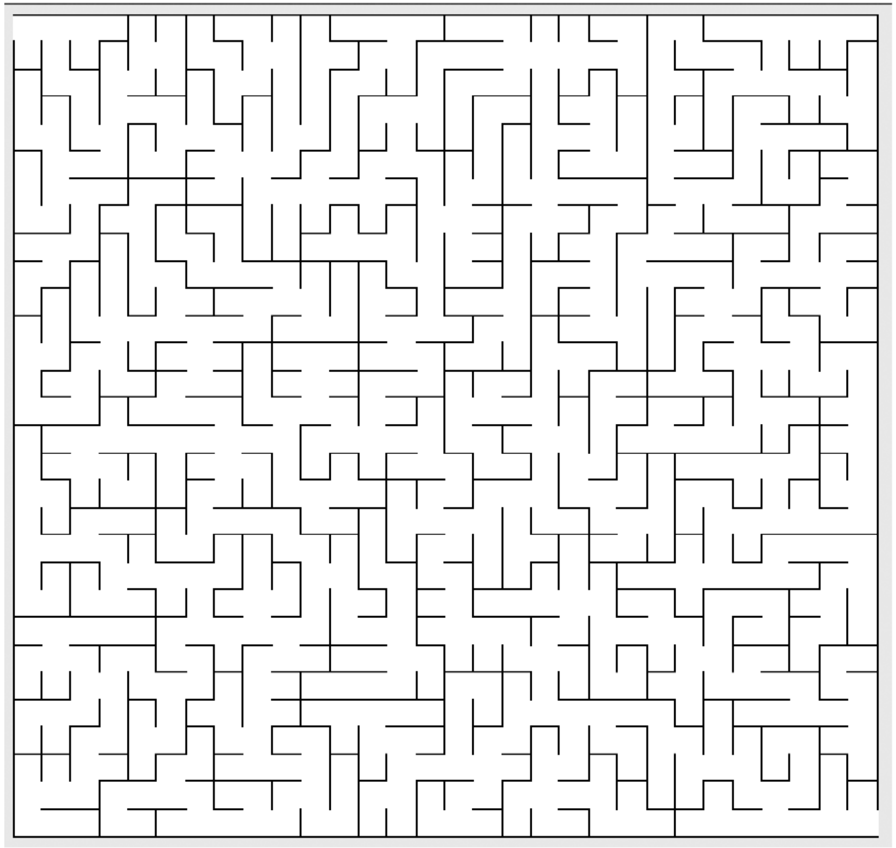
Output: An identification, for each x in S, of the connected component containing x

for each x in S **do**
  makeSet(x)
for each (x, y) in E **do**
  if find(x) $\neq$ find(y) **then**
    union(find(x), find(y))
for each x in S **do**
  Output "Person x belongs to connected component" find(x)

- Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι O(t(n,n+m)), όπου t(j,k) είναι ο χρόνος για k λειτουργίες εύρεσης-ένωσης θεωρώντας ως κατάσταση εκκίνησης j μοναδιαία σύνολα.

Ακόμη μία εφαρμογή: Κατασκευή Λαβύρινθου και Θεωρία Διήθησης

- Πρόβλημα: Κατασκευή ενός καλού λαβύρινθου.



Μια γεννήτρια κατασκευής λαβύρινθων

Algorithm MazeGenerator(G, E):

Input: A grid, G, consisting of n cells and a set, E, of m "walls," each of which divides two cells, x and y, such that the walls in E initially separate and isolate all the cells in G

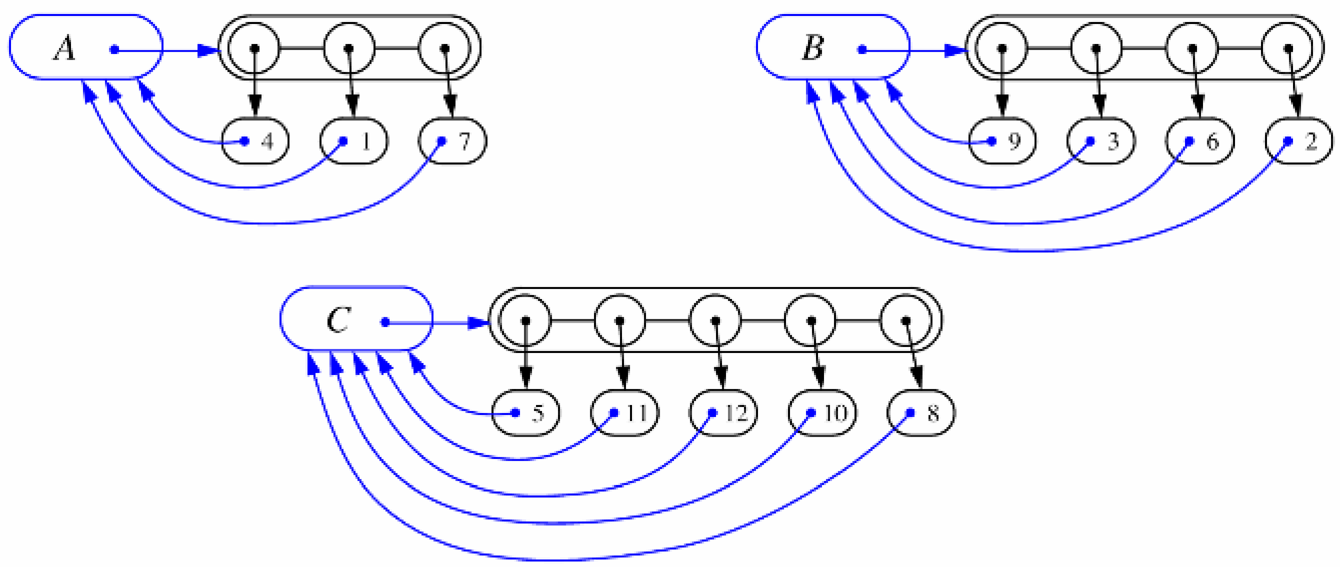
Output: A subset, R of E, such that removing the edges in R from E creates a maze defined on G by the remaining walls

```
while R has fewer than n − 1 edges do
    Choose an edge, (x, y), in E uniformly at random from among those pre-
    viously unchosen
    if find(x) ≠ find(y) then
        union(find(x), find(y))
        Add the edge (x, y) to R
return R
```

- Ο παραπάνω αλγόριθμος σχετίζεται με τη **θεωρία διήθησης**, η οποία μελετά πώς τα ρευστά διαπερνούν πορώδη υλικά.
  - Για παράδειγμα, ένα πορώδες υλικό μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα τρισδιάστατο πλέγμα κελίων **n x n x n**. Τα εμπόδια που χωρίζουν γειτονικά ζεύγη κελιών θα μπορούσαν να αφαιρεθούν εικονικά, με κάποια πιθανότητα **p** και να διατηρηθούν με πιθανότητα **1 – p**. Η προσομοίωση ενός τέτοιου συστήματος είναι μία ακόμα εφαρμογή των δομών ένωσης-εύρεσης.

Υλοποίηση που βασίζεται σε λίστα

- Κάθε σύνολο αποθηκεύεται σε μία ακολουθία που αναπαρίσταται με μία συνδεδεμένη λίστα.
- Κάθε κόμβος πρέπει να αποθηκεύει ένα αντικείμενο που περιέχει το στοιχείο και μία αναφορά στο όνομα του συνόλου.

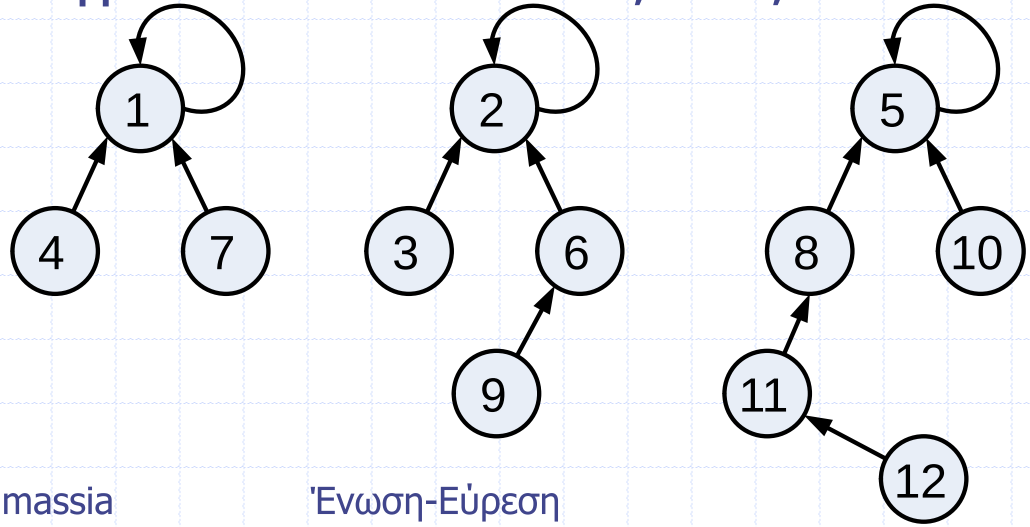


Ανάλυση αναπαράστασης που βασίζεται σε λίστα

- Όταν εκτελείται μια λειτουργία ένωσης (union), θα μετακινούνται πάντα τα στοιχεία από το μικρότερο σύνολο στο μεγαλύτερο
  - Κάθε φορά που ένα στοιχείο μετακινείται πηγαίνει σε ένα σύνολο τουλάχιστον διπλάσιου μεγέθους από το σύνολο στο οποίο ήταν πριν
  - Έτσι, ένα στοιχείο μπορεί να μετακινηθεί το πολύ O(log n) φορές
- Ο συνολικός χρόνος για n ενώσεις και m αναζητήσεις (find) είναι O(n log n + m).

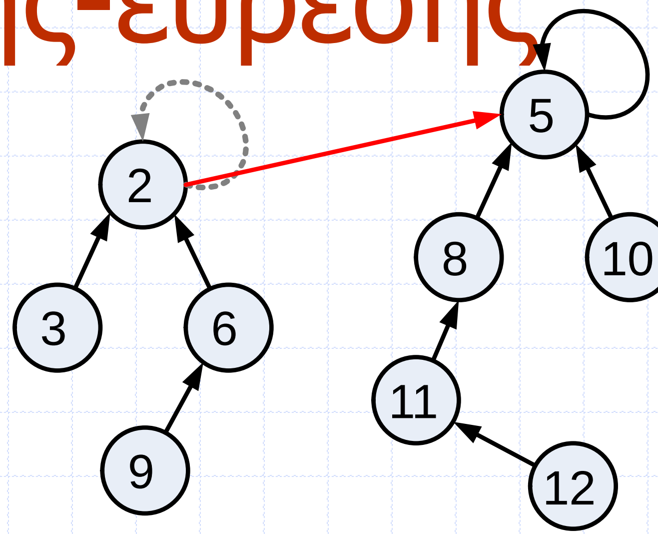
Υλοποίηση που βασίζεται σε δέντρα

- Κάθε στοιχείο αποθηκεύεται σε ένα κόμβο, που περιέχει ένα δείκτη προς το όνομα του συνόλου
- Ένας κόμβος v που ο δείκτης προς σύνολο που διαθέτει δείχνει προς το ίδιο το v λειτουργεί και ως όνομα του συνόλου
- Κάθε σύνολο είναι ένα δέντρο η ρίζα του οποίου είναι ένας κόμβος με αυτό-αναφορά
- Για παράδειγμα: Τα σύνολα "1", "2", και "5":

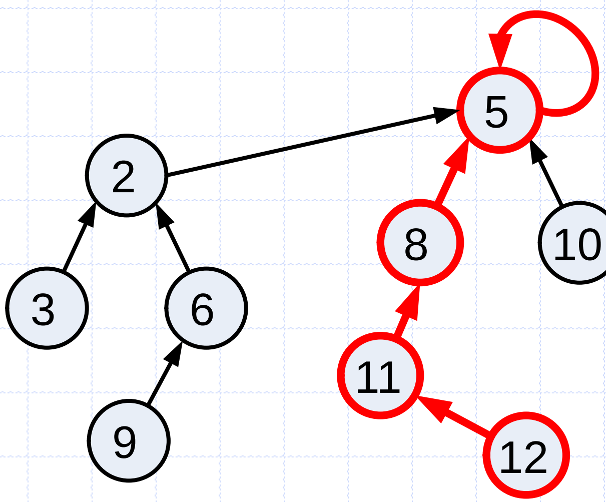


Λειτουργίες ένωσης-εύρεσης

- Για να πραγματοποιηθεί μια ένωση (union), απλώς κάνουμε τη ρίζα του ενός δέντρου να δείχνει την ρίζα του άλλου

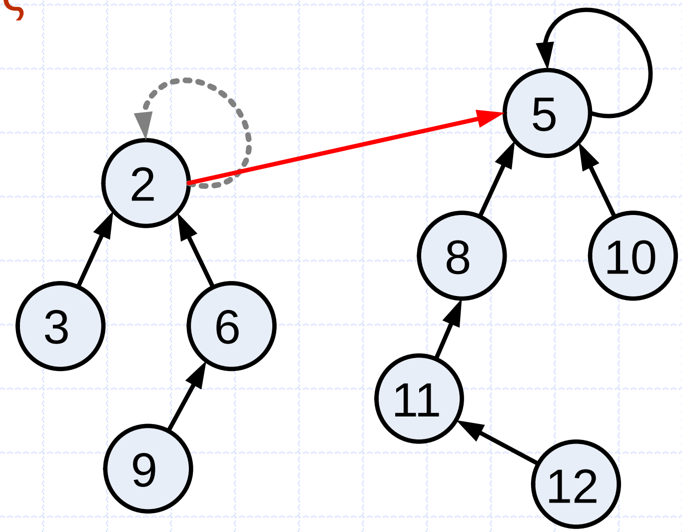


- Για να γίνει εύρεση (find), από τον κόμβο έναρξης ακολουθούμε τους δείκτες μέχρι να βρούμε κόμβο που ο δείκτης συνόλου αναφέρεται στον ίδιο τον κόμβο



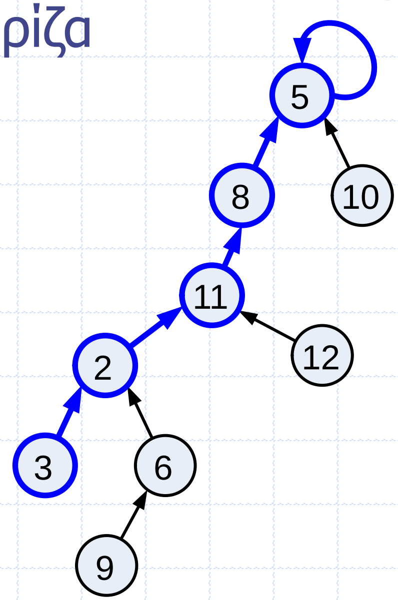
Ένωση-Εύρεση (ευρετικός μηχανισμός 1)

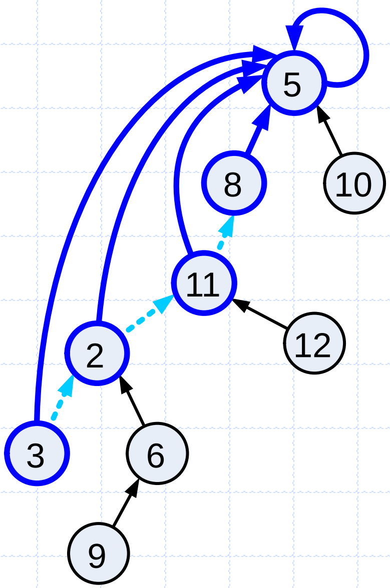
- **Ένωση κατά μέγεθος (union by size)**:
  - Κατά την πραγματοποίηση μιας ένωσης (union), κάνουμε τη ρίζα του μικρότερου δέντρου να δείχνει στη ρίζα του μεγαλύτερου δένδρου.
- Για την εκτέλεση n λειτουργιών ένωσης-εύρεσης χρειάζεται O(n log n) χρόνος:
  - Κάθε φορά που ακολουθούμε κάποιον δείκτη πηγαίνουμε σε ένα υπό-δέντρο τουλάχιστον διπλάσιου μεγέθους από το προηγούμενο υπό-δέντρο.
  - Έτσι ακολουθούμε το πολύ O(log n) δείκτες για κάθε εύρεση (find).



Ένωση-Εύρεση (ευρετικός μηχανισμός 2)

- **Συμπίεση διαδρομής:**
  - Μετά την εκτέλεση μιας εύρεσης, πραγματοποιείται συμπίεση όλων των δεικτών στη διαδρομή που διανύθηκε ώστε να δείχνουν στην ρίζα





- Οδηγεί σε «σχεδόν γραμμικό» χρόνο για n λειτουργίες ένωσης-εύρεσης.

Συνάρτηση Ackermann

The version of the Ackermann function we use is based on an indexed function, A_i, which is defined as follows, for integers $x \geq 0$ and $i > 0$:

$$\begin{aligned} A_0(x) &= x+1 \\ A_{i+1}(x) &= A_i^{(x)}(x), \end{aligned}$$

where $f^{(k)}$ denotes the k-fold composition of the function f with itself. That is,

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= x \\ f^{(k)}(x) &= f(f^{(k-1)}(x)). \end{aligned}$$

So, in other words, $A_{i+1}(x)$ involves making x applications of the A_i function on itself, starting with x. This indexed function actually defines a progression of functions, with each function growing much faster than the previous one:

- $A_0(x) = x + 1$, which is the increment-by-one function
- $A_1(x) = 2x$, which is the multiply-by-two function
- $A_2(x) = x2^x \geq 2^x$, which is the power-of-two function
- $A_3(x) \geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ (with x number of 2's), which is the tower-of-twos function
- $A_4(x)$ is greater than or equal to the tower-of-tower-of-twos function
- and so on.

Συνάρτηση Ackermann

- Η **συνάρτηση Ackermann**, A(X) είναι μια συνάρτηση που αυξάνεται απίστευτα γρήγορα. Το A(3) είναι 2048 και το A(4) είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος από τον αριθμό των υποατομικών σωματιδίων στο συμπάν.
- Ομοίως το αντίστροφο,

$$\alpha(n) = \min\{x: A(x) \geq n\},$$

- Είναι μια συνάρτηση που αυξάνεται απίστευτα αργά. Ακόμα κι αν θεωρητικά το $\alpha(n)$ αυξάνεται καθώς το n τείνει στο άπειρο, για οποιαδήποτε πρακτική χρήση, μπορούμε να θεωρούμε ότι $\alpha(n) \leq 4$.

Γρήγορη επιμερισμένη ανάλυση

- Για κάθε κόμβο v στο δέντρο union που είναι ρίζα
  - ορίζουμε n(v) να είναι το μέγεθος του υπό-δένδρου με ρίζα στο v (συμπεριλαμβανομένου του v)
  - Ορίζουμε ένα σύνολο με την ρίζα του συσχετιζόμενου δέντρο.
- Ενημερώνουμε το πεδίο του μεγέθους του v κάθε φορά που ένα σύνολο ενώνεται με το v. Έτσι, αν το v δεν είναι ρίζα, τότε n(v) είναι μεγαλύτερο όσο μεγάλο μπορεί να είναι το υπό-δένδρο με ρίζα το v, που συμβαίνει ακριβώς πριν ενώσουμε το v σε κάποιον άλλον κόμβο που το μέγεθος του είναι τουλάχιστον όσο του v.
- Για κάθε κόμβο v, ορίζουμε τον βαθμό του v, τον οποίο συμβολίζουμε ως r(v), ως εξής r(v) = [log n(v)] + 2:
- Συνεπώς, $n(v) \geq 2^{r(v)-2}$.
- Επίσης, επειδή υπάρχουν το πολύ n κόμβοι στο δέντρο του v, r(v) $\leq$ [log n]+2, για κάθε κόμβο v.

Επιμερισμένη ανάλυση (2)

- Για κάθε κόμβο v με γονέα τον w:
  - r (v) < r (w)

Proof: We make v point to w only if the size of w before the union is at least as large as the size of v. Let $n(w)$ denote the size of w before the union and let $n'(w)$ denote the size of w after the union. Thus, after the union we get

$$
\begin{aligned}
r(v) &= \lfloor \log n(v) \rfloor + 2 \\
&< \lfloor \log n(v) + 1 \rfloor + 2 \\
&= \lfloor \log 2n(v) \rfloor + 2 \\
&\leq \lfloor \log(n(v) + n(w)) \rfloor + 2 \\
&= \lfloor \log n'(w) \rfloor + 2 \\
&\leq r(w).
\end{aligned}
$$

■

- Έτσι οι βαθμοί αυξάνονται αυστηρά όσο ακολουθούμε τους δείκτες προς τους γονείς.

Επιμερισμένη ανάλυση (3)

- Λήμμα: Υπάρχουν το πολύ $n/ 2^{s-2}$ κόμβοι βαθμού s.
- Απόδειξη:
  - Επειδή $r(v) < r(w)$, για κάθε κόμβο v με γονέα w, οι βαθμοί αυξάνονται αυστηρά όσο ακολουθούμε τους δείκτες γονέων ανοδικά σε οποιοδήποτε δέντρο.
  - Συνεπώς, αν $r(v) = r(w)$ για δύο κόμβους v και w, τότε οι κόμβοι που μετράμε στο n(v) πρέπει να είναι διαφορετικοί απ' τους κόμβους που μετράμε στο n(w).
  - Εάν ένας κόμβος είναι v είναι βαθμού s, τότε $n(v) \geq 2^{s-2}$.
  - Επομένως, επειδή υπάρχουν το πολύ n κόμβοι συνολικά, μπορεί να υπάρχουν το πολύ $n/2^{s-2}$ που είναι βαθμού s.

Επιμερισμένη ανάλυση (4)

For the sake of our amortized analysis, let us define a ***labeling function***, $L(v)$, for each node v, which changes over the course of the execution of the operations in σ. In particular, at each step t in the sequence σ, define $L(v)$ as follows:

$$L(v) \;=\; \text{the largest } i \text{ for which } r(p(v)) \geq A_i(r(v)).$$

Note that if v has a parent, then $L(v)$ is well-defined and is at least 0, since

$$r(p(v)) \;\geq\; r(v)+1 \;=\; A_0(r(v)),$$

because ranks are strictly increasing as we go up the tree U. Also, for $n \geq 5$, the maximum value for $L(v)$ is $\alpha(n)-1$, since, if $L(v) = i$, then

$$\begin{aligned} n &> \lfloor \log n \rfloor + 2 \\ &\geq r(p(v)) \\ &\geq A_i(r(v)) \\ &\geq A_i(2). \end{aligned}$$

Or, put another way,

$$L(v) \;<\; \alpha(n),$$

for all v and t.

Επιμερισμένη ανάλυση (5)

- Έστω ότι v είναι κόμβος κατά μήκος μίας διαδρομής P. Χρησιμοποιούμε δύο κανόνες για την χρέωση ενός κυβερνοδολαρίου όταν ακολουθούμε το δείκτη γονέα για το v:
  - Αν το v έχει έναν πρόγονο w στο P έτσι ώστε L(v) = L(w), σ' αυτό το χρονικό σημείο, τότε χρεώνουμε ένα κυβερνοδολάριο στο ίδιο το v.
  - Αν το v δεν έχει τέτοιον πρόγονο, τότε χρεώνουμε ένα κυβερνοδολάριο σ' αυτήν την πράξη find.
- Καθώς υπάρχουν $\alpha(n)$ ομάδες βαθμού, αυτός ο κανόνας εγγυάται ότι κάθε λειτουργία find θα χρεωθεί το πολύ $\alpha(n)$ κυβερνοδολάρια.

Επιμερισμένη ανάλυση (6)

- Αφού χρεώσουμε έναν κόμβο v τότε το v θα αποκτήσει έναν νέο γονέα, που είναι ένας κόμβος ψηλότερα στο δέντρο του v.
- Ο βαθμός του νέου γονέα του v θα είναι μεγαλύτερο από τον παλιό γονέα του v τον w.
- Κάθε κόμβος v μπορεί να χρεωθεί το πολύ r(v) κυβερνοδολάρια πριν το L(v) αυξηθεί τουλάχιστον κατά 1.
- Επειδή το L(v) μπορεί να αυξηθεί το πολύ α(n)-1 φορές, αυτό σημαίνει ότι μπορεί να χρεωθούν το πολύ r(n)α(n) κυβερνοδολάρια.

Επιμερισμένη ανάλυση (7)

- Αν συνδυάσουμε αυτό το γεγονός με το όριο του αριθμού των κόμβων κάθε βαθμού, χρεώνονται το πολύ

$$s\,\alpha(n)\frac{n}{2^{s-2}} = n\,\alpha(n)\frac{s}{2^{s-2}}$$

κυβερνοδολάρια σε όλες τις κορυφές του βαθμού s.

- Αν αθροίσουμε όλους τους πιθανούς βαθμούς, ο συνολικός αριθμός κυβερνοδολαρίων που χρεώνονται σε όλους τους κόμβους είναι το πολύ

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\lfloor \log n \rfloor + 2} n\,\alpha(n)\frac{s}{2^{s-2}} &\leq \sum_{s=0}^{\infty} n\,\alpha(n)\frac{s}{2^{s-2}} \\ &= n\,\alpha(n)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{s}{2^{s-2}} \\ &\leq 8n\,\alpha(n),\end{aligned}$$

- Συνεπώς, ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για m λειτουργίες union-find, ξεκινώντας από n μοναδιαία σύνολα είναι O((n+m)α(n)).